Lusin 定理

Lusin 定理刻画了可测函数与连续函数之间的关系. 为证明需要，首先定义特征函数和简单函数.

定义 1 (特征函数)**.** 设集合 $A \subset X$，定义函数

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, \ x \in A, \\ 0, \ x \in X \backslash A. \end{cases}$$

称 $\chi_A(x)$ 为定义在 X 上的 A 的**特征函数**.

定义 2 (简单函数)**.** 设定义在 D 上的 $f(x) = c_i, \ x \in D_i$，$i \in I$ 使得至多可数个集合 D_i 满足

$$\bigsqcup_{i \in I} D_i = D,$$

则称 $f(x)$ 为**简单函数**.

注. 简单来说，简单函数是有有限个取值或可列个取值的函数.

简单函数可以用特征函数的语言描述，即

$$f(x) = \sum_{i \in I} c_i \chi_{D_i}(x), \qquad f(x) = c_i, \ x \in D_i$$

定理 1 (简单函数逼近定理)**.**

1. 若 $f(x)$ 是 E 上的非负可测函数，则存在非负可测的简单函数渐升列：

   $$\varphi_k(x) \leqslant \varphi_{k+1}(x), \ k = 1, 2, \cdots,$$

   使得

   $$\lim_{k \to \infty} \varphi_k(x) = f(x), \ x \in E.$$

2. 若 $f(x)$ 是 E 上的可测函数，则存在可测的简单函数列 $\{\varphi_k(x)\}$，使得 $|\varphi_k(x)| \leqslant |f(x)|$，且

   $$\lim_{k \to \infty} \varphi_k(x) = f(x), \ x \in E.$$

   若 $f(x)$ 还是有界的，则简单函数列是一致收敛的.

注. 为节省篇幅和突出主题，该定理证明从略.

定理 2 (Lusin 定理)**.** 设 $f(x)$ 是定义在 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的几乎处处有限的可测函数，则对任意 $\delta > 0$，存在闭集 $F \subset E$ 满足 $m(E \backslash F) < \delta$，使得 $f(x)$ 是 F 上的连续函数.

证明. 不妨设 $f(x)$ 处处有限.

首先考虑 $f(x)$ 为可测有限简单函数. 即

$$f(x) = \sum_{i=1}^{p} c_i \chi_{E_i}(x),\ x \in E = \bigsqcup_{i=1}^{p} E_i,$$

对任意 $\delta > 0$，在每个 E_i 中，可以取闭集 F_i 使得

$$m(E_i \backslash F_i) < \frac{\delta}{p}, \qquad i = 1, 2, \cdots, p.$$

对任意 $x \in F_i$，$f(x) = c_i$ 为连续函数，又 F_i 两两不交，故 $f(x)$ 在 $F = \bigcup F_i$ 上连续. 显然 F 为闭集，且

$$m(E \backslash F) = \sum_{i=1}^{p} m(E_i \backslash F_i) < \sum_{i=1}^{p} \frac{\delta}{p} < \delta.$$

其次考虑 $f(x)$ 为一般可测函数. 不妨设为有界函数. 由简单函数逼近定理，存在简单函数列 $\{\varphi_k(x)\}$，在 E 上一致收敛于 $f(x)$. 故对任意 $\delta > 0$，可作闭集 F_k，$m(E \backslash F_k) < \dfrac{\delta}{2^k}$，使得 $\varphi_k(x)$ 在 F_k 上连续. 令 $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$，则 $F \subset E$，且

$$m(E \backslash F) < \sum_{k=1}^{\infty} m\left(E \backslash F_k\right) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^k} < \delta.$$

由于每个 $\varphi_k(x)$ 在 F 上都是连续的，由一致收敛性，$f(x)$ 在 F 上连续.

$\square$